

PROPRIETES GENERIQUES DE PROCESSUS CROISES

PAR
PIERRE LIARDET

ABSTRACT

Let S_φ be the skew product transformation $(x, g) \mapsto (Sx, g\varphi(x))$ defined on $\Omega \times G$, where Ω is a compact metric space, G a compact metric group with its Haar measure h . If S is a μ -continuous transformation where μ is a Borel measure on Ω , ergodic with respect to S , we study the set \mathcal{E}_0 of μ -continuous applications $\varphi : \Omega \rightarrow G$ such that $\mu \otimes h$ is ergodic (with respect to S_φ). For example, \mathcal{E}_0 is residual in the group of μ -continuous applications from Ω to G with the uniform convergence topology. We also study the weakly mixing case. Some arithmetic applications are given.

1. Introduction et notations

L'objet de cet article est l'étude de l'ergodicité des processus croisés d'un point de vue topologie générique, avec des applications à l'irrégularité de répartition des suites selon une mesure, principalement sur le tore.

Soient Ω un espace métrisable compact, μ une mesure de probabilité borélienne sur Ω , G un groupe compact métrisable de mesure de Haar normalisée h . Etant donnée une application $S : \Omega \rightarrow \Omega$, nous dirons avec H. Furstenberg [8] que le triplet (Ω, S, μ) , simplement noté S s'il n'y a pas d'ambiguïté, est un *processus* si l'application S est μ -mesurable et μ invariante par S . Rappelons qu'un tel processus est dit ergodique si μ est ergodique selon S , i.e., si les seules applications numériques sur Ω , μ -mesurables et invariantes par S , sont les applications constantes (au sens μ -presque partout). Lorsque φ est une application mesurable de Ω dans G , au sens des mesures μ et h , la transformation S_φ définie sur $\Omega \times G$ par

$$S_\varphi(\omega, g) = (S\omega, g \cdot \varphi(\omega)),$$

la loi sur G étant notée multiplicativement, détermine un processus croisé $(\Omega \times G, S_\varphi, \mu \otimes h)$, où $\mu \otimes h$ désigne la mesure produit de μ par h .

Les processus croisés ont fait l'objet de nombreuses investigations. Cette notion a été introduite par H. Anzai [3]. De manière générale, S étant ergodique, le problème est de déterminer des conditions sur φ qui assurent l'ergodicité de S_φ . Dans la suite, l'ensemble des $\varphi : \Omega \rightarrow G$, mesurables, sera noté $\mathcal{G}(\Omega, G)$ (ou simplement \mathcal{G} lorsque le contexte ne prêterait pas à confusion). \mathcal{G} est un groupe pour la loi ponctuelle induite par celle de G . L'ensemble des φ telles que les processus croisés correspondants S_φ sont ergodiques sera noté $\mathcal{E}(S, G)$.

Lorsque S représente une rotation irrationnelle sur le tore \mathbf{R}/\mathbf{Z} et G le s -tore $\mathbf{R}^s/\mathbf{Z}^s$, H. Furstenberg [7] a étudié l'unique ergodicité de S_φ pour une famille de fonctions lipschitziennes, ramenant le problème à l'étude des solutions d'équations fonctionnelles. Cette démarche déjà présente chez Anzai a permis de préciser, entre autre, l'irrégularité de distribution des suites $n \mapsto n\theta \bmod 1$, θ réel irrationnel (J. P. Conze [4], J. P. Conze et M. Keane [5], G. Rauzy [16], M. Stewart [17], W. A. Veech [18, 19]).

Lorsque S est le shift bilatéral sur $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$, μ la mesure produit infinie associée à l'équiprobabilité sur $\{0, 1\}$, et $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, R. L. Adler et P. C. Shields [1] ont précisé la structure de S_φ lorsque φ vaut α_i sur le cylindre $\{(\omega_n)_{n \geq 0}; \omega_0 = i\}$, montrant que S_φ est isomorphe à S si $\alpha_1 - \alpha_0$ est irrationnel. Dans [2] ils envisagent le cas où, sous certaines conditions de mesurabilité et de continuité de type Hölder, S_φ est de Bernoulli lorsqu'il est faiblement mélangeant. Par ailleurs, si S est le shift sur $\Omega_\infty = \Omega^{\mathbf{N}}$, muni de la mesure produit μ_∞ induite par μ , nous avons donné [14] une condition nécessaire et suffisante pour que S_φ soit faiblement mélangeante dans le cas où φ ne dépend que de la première composante et d'image au plus dénombrable dans G .

Le but de cet article est d'opposer aux types de résultats que nous venons d'évoquer, un point de vue générique, rejoignant en cela celui de M. Keane et G. Rauzy [12].

Le processus (Ω, S, μ) sera dit *régulier* si S est μ -continue, c'est-à-dire continue μ -presque partout. Nous désignerons par $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(\Omega, G)$ formé des applications φ μ -continues. S_φ est régulier si S est régulier et φ μ -continue. Nous nous proposons d'étudier $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$, d'un point de vue topologique, pour des sous-groupes Γ de \mathcal{G}_0 munis de topologies convenables.

Nous dirons qu'une partie A d'une espace topologique X est *résiduel* s'il est dense dans X et intersection dénombrable d'ouverts. Lorsque X est métrisable complet, d'après le théorème de catégorie de Baire, A est résiduel s'il est intersection dénombrable d'ouverts denses dans X . Une partie de X est dite F_σ

si elle est union dénombrable de fermés. Ainsi, pour que A soit résiduel dans X , il faut et il suffit que son complémentaire dans X , noté $A \setminus X$, soit un ensemble F_σ d'intérieur vide.

Munissons \mathcal{G}_0 de la topologie de la convergence uniforme; on obtient ainsi un groupe topologique complet, noté \mathcal{G}_0^∞ . Choisissons S régulier et G abélien connexe, nous montrons en particulier (paragraphe 3):

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{G}_0^\infty \text{ est résiduel.}$$

Nous introduirons également sur \mathcal{G}_0 une autre topologie de groupe, moins fine que celle de la convergence uniforme et définissant un groupe topologique \mathcal{G}_0^1 pour lequel on a aussi

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{G}_0^1 \text{ est résiduel.}$$

Ainsi, le caractère résiduel de $\mathcal{E} \cap \mathcal{G}_0$ est stable pour toute topologie intermédiaire entre celle de \mathcal{G}_0^∞ et celle de \mathcal{G}_0^1 .

Au paragraphe 2 nous démontrons la densité de $\mathcal{E} \cap \Gamma$ dans certains sous-groupes Γ , lorsque G est abélien; elle résulte de l'étude des équations fonctionnelles évoquées plus haut. Le caractère résiduel est alors une conséquence du paragraphe 3 où l'on montre, en toute généralité sur G , que

$$\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{E} \text{ est un ensemble } F_\sigma \text{ dans } \mathcal{G}_0^1,$$

S étant régulier. Lorsque G est abélien, on obtient un principe de "tout ou rien":

*Pour tout K sous-groupe topologique compact connexe de \mathcal{G}_0^1 ,
l'ensemble $\mathcal{E} \cap K$ est soit vide,
soit résiduel de mesure de Haar (dans K) égale à 1.*

Nous terminons ce paragraphe en montrant que le cas où S est "uniquement ergodique" n'est pas différent du cas ergodique.

Le paragraphe 4 est consacré aux processus faiblement mélangeants i.e. tels que le processus produit $(\Omega \times \Omega, S \times S, \mu \otimes \mu)$ soit ergodique, avec une attention particulière aux shifts. Ainsi lorsque S est la multiplication par r (entier ≥ 2) modulo 1 et μ la mesure de Haar sur le tore, on montre en suivant une idée de W. Veech [20] que l'ensemble des $\varphi : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ telles que S_φ soit faiblement mélangeant est résiduel dans \mathcal{G}_0^1 comme dans \mathcal{G}_0^∞ .

Nous terminons au paragraphe 5 par l'étude, pour les suites $n \mapsto \omega_n$ génératrices avec (Ω, S, μ) régulier, de l'ensemble des $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ telles que la suite

$$(*) \quad n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\omega_k)$$

soit e.r. mod 1. Par exemple, cet ensemble contient un sous-ensemble résiduel dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega)$. Lorsque $(\omega_n)_n$ est complètement équirépartie, on obtient des résultats plus précis: la suite (*) est équirépartie modulo 1 pour φ continue non égale à une constante rationnelle.

Je remercie le Professeur G. Rauzy de l'intérêt qu'il a porté à ce travail et de ses remarques riches d'enseignement.

2. Equations fonctionnelles et densité de \mathcal{E}

Désignons par $\Lambda(G)$ un système complet de représentations unitaires non triviales irréductibles et non équivalentes entre elles de G , H_{π} l'espace de Hilbert de la représentation π dans Λ , et U_{π} le groupe des endomorphismes unitaires sur H_{π} .

H_{π} est de dimension finie sur \mathbb{C} , de norme notée $\|\cdot\|_{\pi}$. Nous utiliserons le critère d'ergodicité suivant:

THÉOREME A. *Soit (Ω, S, μ) un processus ergodique, $\varphi : \Omega \rightarrow G$ μ -mesurable; pour que le processus $(\Omega \times G, S_{\varphi}, \mu \otimes h)$ soit ergodique, il faut et il suffit que pour toute π dans $\Lambda(G)$ l'équation*

$$(1) \quad F(\omega) = \pi(\varphi(\omega)) \cdot F(S\omega) \quad (\mu\text{-presque partout}),$$

n'ait pas de solution μ -mesurable $F : \Omega \rightarrow H_{\pi}$ autre que la solution nulle (μ -p.p.).

Ce théorème est démontré dans [4, 21] pour des transformations particulières. La démonstration dans le cas général est analogue, donnons-la brièvement. Si S_{φ} est ergodique et F une solution mesurable de (1) alors l'application $(\omega, g) \mapsto \pi(g) \cdot F(\omega)$ de $\Omega \times G$ dans H_{π} est invariante par S_{φ} donc constante presque partout. Mais π étant irréductible non triviale, l'intégrale vectorielle $\int_G \pi(g)F(\omega)h(dg)$ est nulle et la constante aussi. Réciproquement, soit $F : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable et invariante par S_{φ} ; envisageons $F_{\pi} : \Omega \rightarrow \text{End}(H_{\pi})$ l'application mesurable définie par

$$F_{\pi}(\omega) = \int_G F(\omega, g)\pi(g)h(dg).$$

Alors F_{π} est solution de (1). Si les seules solutions mesurables de (1) à valeurs dans H_{π} sont nulles, alors $F_{\pi}(\omega)$ est l'endomorphisme nul pour presque tout ω . D'après le théorème de Peter-Weyl, Λ étant dénombrable, $g \mapsto F(\omega, g)$ est constante pour presque tout ω ; l'ergodicité de S assure F constante.

Désignons par \bar{S} l'isométrie $f \rightarrow f \circ S$ induite par le processus S sur l'espace de Hilbert $L^2_c(\Omega, \mu)$. L'espace Ω étant métrisable compact, L^2 est séparable; en particulier, l'ensemble $V(S)$ des valeurs propres de \bar{S} forme un sous-groupe au plus dénombrable du groupe U des nombres complexes de module égale à 1.

Supposons G abélien, $\Lambda(G)$ est alors le groupe des caractères \hat{G} moins le caractère trivial. Il résulte du théorème A que pour φ constante égale à a , lorsque S est ergodique, le processus correspondant S_a est ergodique si et seulement si a n'appartient pas à l'ensemble

$$G(S) = \bigcup_{\pi \in \Lambda} \pi^{-1}(V(S)).$$

Supposons G connexe, alors $\text{Ker}(\pi)$ est de h -mesure nulle pour toute π dans $\Lambda(G)$ et par suite $G(S)$ est de h -mesure nulle car union dénombrable d'ensembles de mesures nulles. D'autre part $\text{Ker}(\pi)$ est fermé d'intérieur vide, donc du point de vue topologique $G(S)$ est un ensemble maigre.

Résumons:

THÉORÈME B. *Soit (Ω, S, μ) ergodique et G un groupe abélien métrisable compact et connexe; alors l'ensemble des applications constantes $\varphi : \Omega \rightarrow G$ telles que le processus croisé S_φ soit ergodique, identifié dans G , est un ensemble résiduel de mesure de Haar 1.*

REMARQUE 1. Supposons S faiblement mélangeante et notons G_a le sous-groupe fermé engendré par a , h_a sa mesure de Haar. Alors pour $\varphi : \Omega \rightarrow G_a$ constante égale à a , le processus $(\Omega \times G_a, S_a, \mu \otimes h_a)$ est ergodique. En particulier S_a est ergodique sur G pour tout a générateur de G et le théorème B redonne un résultat classique [9] sur l'ensemble des générateurs de G .

REMARQUE 2. Sans supposer G abélien, s'il existe a dans G tel que S_a soit ergodique, alors la suite $n \mapsto a^n$ est équirépartie dans G selon h . En particulier, a engendre un sous-groupe dense dans G . Ainsi G est un groupe monothétique et donc abélien.

Un sous-groupe Γ de $\mathcal{G}(\Omega, G)$ muni d'une topologie de groupe sera dit groupe G -compatible s'il contient les constantes et si l'injection canonique $G \rightarrow \Gamma$ qui identifie G avec le sous-groupe des constantes est continue. Lorsque G est abélien, sa loi de groupe et celle de $\mathcal{G}(\Omega, G)$ seront notées additivement, sauf pour $G = U$.

PROPOSITION 1. *Sous les hypothèses du théorème B, pour tout Γ groupe G -compatible, l'ensemble $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$ est dense dans Γ .*

DÉMONSTRATION. Soit φ dans Γ et a dans G n'appartenant pas à $G(S_\varphi)$. Pour toute π dans $\Lambda(G)$ et $F: \Omega \rightarrow H_\pi$ mesurable telle que $F = \pi(a + \varphi) \cdot F \circ S$, l'application $(\omega, g) \mapsto \pi(g) \cdot F(\omega)$ est solution de $\Phi = \pi(a) \cdot \Phi \circ S_\varphi$; par le choix de a , elle est essentiellement nulle, donc F aussi. Par hypothèse sur Γ et la compacité de G , le sous-groupe dans Γ des constantes est isomorphe à G ; notons-le encore G . D'après le théorème B, $\varphi + (G \setminus G(S_\varphi))$ est résiduel dans $\varphi + G$, donc dense et la conclusion résulte alors du théorème A. \square

Soit π dans $\Lambda(G)$. Pour toute χ dans $\Lambda(U_\pi)$, la représentation $\chi \circ \pi$ n'est en général pas irréductible mais il existe π_1, \dots, π_r dans $\Lambda(G)$ telles que $\chi \circ \pi$ soit équivalente à la représentation somme directe $\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r$, dont l'espace de Hilbert associé est la somme directe $H_{\pi_1} \oplus \dots \oplus H_{\pi_r}$, isométrique à H_χ . Le théorème A et ce qui précède mène alors à la

PROPOSITION 2. Soit φ dans $\mathcal{G}(\Omega, G)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\varphi \in \mathcal{Z}(S, G)$,
- (ii) $\forall \pi \in \Lambda(G), \pi \circ \varphi \in \mathcal{Z}(S, U_\pi)$.

Notons encore $\| \cdot \|_\pi$ la norme usuelle sur l'anneau des endomorphismes $\text{End}(H_\pi)$. Choisissons une famille $(a_\pi)_{\pi \in \Lambda(G)}$ de nombres réels $a_\pi > 0$, telle que

$$\sum_{\pi \in \Lambda} a_\pi = 1.$$

Pour toutes φ, ψ dans $\mathcal{G}(\Omega, G)$, posons

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{\pi \in \Lambda} a_\pi \int_{\Omega} \| \pi \circ \varphi(\omega) - \pi \circ \psi(\omega) \|_\pi \mu(d\omega).$$

Nous définissons ainsi sur \mathcal{G} une pseudo-distance invariante par les translations de \mathcal{G} . Si \mathcal{N} désigne le sous-groupe des φ constantes μ -p.p. égales à 1_G (élément neutre de G), alors

$$\mathcal{N} = \{ \varphi \in \mathcal{G}; d(\varphi, 1_\mathcal{G}) = 0 \}.$$

d définit sur \mathcal{G} une structure uniforme (en général non séparée) qui ne dépend pas du choix de la famille $(a_\pi)_{\pi \in \Lambda}$ et fait de \mathcal{G} un groupe topologique que l'on notera $\mathcal{G}^1(\Omega, G)$. Ce groupe est G -compatible et en fait, pour tous x, y éléments de G , regardés comme applications constantes, on a :

$$d(x, y) = \sum_{\pi \in \Lambda} a_\pi \| \pi(x) - \pi(y) \|_\pi,$$

et d peut servir de distance invariante par les translations sur le groupe G . Notons que la topologie de \mathcal{G}^1 est moins fine que la topologie de la convergence uniforme de \mathcal{G}^∞ et

$$d(\varphi, \psi) \leq \sup_{\omega \in \Omega} d(\varphi(\omega), \psi(\omega)).$$

REMARQUE 3. L'homomorphisme de groupe $\varphi \mapsto \pi \circ \varphi$ de $\mathcal{G}^1(\Omega, G)$ dans $\mathcal{G}^1(\Omega, U_\pi)$, défini pour π dans $\Lambda(G)$, est continu. Supposons alors G abélien connexe et soit Γ un sous-groupe de $\mathcal{G}^1(\Omega, G)$ contenant les constantes. Alors $\Gamma \cap \mathcal{E}(S, G)$ est résiduel dans Γ si pour toute π dans $\Lambda(G)$, l'ensemble $\bar{\pi}(\Gamma) \cap \mathcal{E}(S, U_\pi)$ est résiduel dans $\bar{\pi}(\Gamma)$.

3. Flot associé à un processus régulier

Soit (Ω, S, μ) un processus régulier, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega \times G)$ l'espace de Banach des fonctions numériques continues sur $\Omega \times G$, pour la norme uniforme, et soit \mathcal{C}^* le dual faible de \mathcal{C} . L'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Omega \times G)$ des mesures boréliennes de probabilité est une partie métrisable compacte de \mathcal{C}^* . Désignons par M le sous-espace de \mathcal{P} des mesures dont la projection sur le premier facteur est μ . M est faiblement fermé; c'est donc une partie faiblement compacte de \mathcal{P} . Soit φ dans $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$, la transformation S_φ est ν -continue pour toute ν de M et la mesure $\hat{S}_\varphi \nu$ définie par $\hat{S}_\varphi \nu(f) = \int_{\Omega \times G} f \circ S_\varphi(x) \nu(dx)$ est dans M .

PROPOSITION 3. *La transformation $\hat{S}_\varphi : M \rightarrow M$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Introduisons l'espace \mathcal{R} des applications $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbf{R}$ pour chacune desquelles existe un ensemble μ -négligeable A_f tel que l'ensemble des points de discontinuité de f soit contenu dans $A_f \times G$. Muni de la norme de la convergence uniforme, \mathcal{R} est un espace de Banach stable pour l'opération $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$; de plus \bar{S}_φ est stable sur \mathcal{R} . Soit L une forme linéaire positive sur \mathcal{R} , elle est continue et sa restriction à \mathcal{C} définit une mesure borélienne ℓ . Supposons ℓ dans M , alors toute f dans \mathcal{R} est ℓ -Riemann intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe u et v dans \mathcal{C} telles que

$$u \leq f \leq v \quad \text{et} \quad \ell(v - u) \leq \varepsilon.$$

Mais $L(u) = \ell(u)$ et $L(v) = \ell(v)$ et L positive d'où

$$|\ell(f) - L(f)| \leq \varepsilon,$$

et par suite ℓ coïncide avec L sur \mathcal{R} . Soit \mathcal{R}^* le dual faible de \mathcal{R} , M' le sous-ensemble des L dans \mathcal{R}^* dont la restriction ℓ à \mathcal{C} est dans M . Notons

$p : M \rightarrow M'$ l'application qui a tout ℓ dans M associe la forme linéaire positive $L = p(\ell)$ de M' définie sur \mathcal{R} par:

$$L(f) = \int_{\Omega \times G} f(x)\ell(dx).$$

Ce qui précède montre que p est bijective. Montrons que p est un homéomorphisme. On voit facilement que M' est fermé dans la boule unité de \mathcal{R}^* qui est faiblement compacte (théorème d'Alaoglu), M' est donc compact et il suffit de montrer que p^{-1} est continue, ce qui est immédiat puisque p^{-1} consiste à identifier les éléments de M' avec les mesures correspondantes obtenues par restriction sur \mathcal{C} . Soit $(\nu_n)_n$ une suite dans M convergeant vers ν , alors pour toute f dans \mathcal{R}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_\nu \nu_n(f) = \hat{S}_\nu \nu(f). \quad \square$$

REMARQUE 4. La μ -continuité de S et de φ sont essentielles pour obtenir la continuité de \hat{S} définissant ainsi un flot (\hat{S}_φ, M) .

Dans la suite, nous noterons Z_φ l'ensemble des points fixes du flot (\hat{S}_φ, M) , il contient toujours $\mu \otimes h$.

THÉORÈME 1. Soit (Ω, S, μ) un processus ergodique régulier. Pour toute φ dans $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$ le processus $(\Omega \times G, S_\varphi, \mu \otimes h)$ est ergodique si et seulement si le flot (\hat{S}_φ, M) n'a qu'un point fixe.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2, Z_φ est compact dans M ; de plus, il est convexe. D'après le théorème de Krein-Mil'man, Z_φ est enveloppe convexe de ses points extrémaux. Soit ν un tel point et A l'ensemble des λ dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariantes par S_φ . Notons $\lambda \mapsto \lambda_{|1}$ la projection sur le premier facteur défini sur \mathcal{P} . Si $u \in A$, $u_{|1}$ est invariante par S . Supposons avoir

$$\nu = \alpha u + (1 - \alpha)v,$$

avec $\alpha \in [0, 1]$, $u \in A$ et $v \in A$. Alors,

$$\mu = \alpha_{|1} = \alpha u_{|1} + (1 - \alpha)v_{|1}.$$

Le processus S étant ergodique, μ est un point extrémal dans $A_{|1}$, donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ et par suite ν est un point extrémal dans A , ce qui assure l'ergodicité de $(\Omega \times G, S_\varphi, \nu)$.

Si le flot (\hat{S}_φ, M) n'a qu'un point fixe, c'est $\mu \otimes h$ qui est donc extrémal dans A et le processus croisé S_φ est ergodique.

Supposons le processus $(\Omega \times G, S_\varphi, \mu \otimes h)$ ergodique et ν dans Z_φ . Pour toute f dans $\mathcal{C}(\Omega)$ et π dans $\Lambda(G)$ notons $f \otimes \pi$ l'application vectorielle $(\omega, g) \mapsto f(\omega)\pi(g)$ de $\Omega \times G$ dans $\text{End}(H_\pi)$. Pour établir $\nu = \mu \otimes h$, sachant que $\nu|_\Omega = \mu$, il suffit d'après le théorème de Peter-Weyl de montrer que

$$(2) \quad \int_{\Omega \times G} f \otimes \pi(x)\nu(dx) = \mu(f) \int_G \pi(g)h(dg);$$

rappelons que l'intégrale vectorielle $\int_G \pi(g)h(dg)$ est nulle. Le théorème ergodique individuel de Birkhoff [10] montre que pour ν -presque tout (ω, g) , on a

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(S^k \omega)\pi(g\varphi_k(\omega)) = \int_{\Omega \times G} f \otimes \pi(x)\nu(dx),$$

où l'on a posé $\varphi_k(\omega) = (\varphi\omega)(\varphi \circ S\omega) \dots (\varphi \circ S^{k-1}\omega)$. En particulier, pour μ -presque tout ω , il existe g dans G tel que l'on ait (3). Par ailleurs, pour la mesure produit $\mu \otimes h$ on a une information plus précise, à savoir, pour μ -presque tout ω dans Ω , on a:

$$(4) \quad \forall g \in G, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(S^k \omega)\pi(g\varphi_k(\omega)) = 0;$$

il en résulte (2). □

Choisissons une distance ∂ sur M définissant la topologie faible. Pour toute partie A de M notons $\partial(A)$ le diamètre de A et $\partial(\nu, A)$ la distance de ν (dans M) à A .

PROPOSITION 4. Soit (Ω, S, μ) régulier et φ dans $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que l'on ait:

$$(\forall \nu \in M, \forall N \in \mathbb{N}^*)(N \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \partial(\nu_N, Z_\varphi) \leq \varepsilon)$$

avec

$$\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{S}_\varphi^m(\nu).$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que ν_N est élément de M pour tout entier $N \geq 1$. Supposons la proposition fautive; il existe $\varepsilon_0 > 0$, une suite $(\nu^{(k)})_k$ dans M et une suite strictement croissante d'entiers $(N_k)_k$ tels que

$$(5) \quad \partial(\nu_{N_k}^{(k)}, Z_\varphi) \geq \varepsilon_0.$$

Par compacité de M , quitte à prendre une suite extraite convenable, on peut

supposer que la suite $(\nu_{N_k}^{(k)})_k$ converge faiblement vers une mesure λ dans M . Par continuité de \hat{S}_φ , la suite $(\hat{S}_\varphi(\nu_{N_k}^{(k)}))_k$ converge faiblement vers \hat{S}_φ et la relation dans \mathcal{C}^*

$$S_\varphi(\nu_{N_k}^{(k)}) = \nu_{N_k}^{(k)} - \frac{1}{N_k} \nu^{(k)} + \frac{1}{N_k} \hat{S}_\varphi^{N_k}(\nu^{(k)}),$$

montre, par passage à la limite faible, que $\hat{S}_\varphi \lambda = \lambda$. Ainsi $\lambda \in Z_\varphi$, relation en contradiction avec (5). □

Pour la suite, il sera utile de choisir plus explicitement ∂ . Soit $\{f_m ; m \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de fonctions complexes continues sur Ω engendrant un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Nous supposons les normes sup, $\|f_m\|_\infty$, égales à 1. Soit $(a_\pi)_{\pi \in \Lambda(G)}$ la famille de nombres > 0 envisagée au paragraphe 2. On définira ∂ par

$$(6) \quad \partial(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\pi \in \Lambda(G) \\ m \in \mathbb{N}^*}} 2^{-m} a_\pi \left\| \int_{\Omega \times G} f_m \otimes \pi(x)(\lambda - \nu)(dx) \right\|_\pi.$$

Remarquons que (6) a bien un sens et que l'on n'a pas fait intervenir la représentation triviale dans le sommation puisque les termes correspondants seraient nuls.

PROPOSITION 5. Soit (Ω, S, μ) régulier. Pour toutes φ, ψ dans $\mathcal{C}_0(\Omega, G)$ et tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\text{Sup}_{\nu \in M} \partial(\hat{S}_\varphi^k(\nu), \hat{S}_\psi^k(\nu)) \leq kd(\varphi, \psi).$$

DÉMONSTRATION. Par définition, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times G} f_m \otimes \pi(x)(\hat{S}_\varphi^k(\nu) - \hat{S}_\psi^k(\nu))(dx) \\ &= \int_{\Omega \times G} f_m(S^k \omega)(\pi(g\varphi_k \omega) - \pi(g\psi_k \omega))\nu(d\omega dg), \end{aligned}$$

et par convexité, la norme (dans $\text{End}(H_\pi)$) de cette intégrale vectorielle est au plus, compte tenu de $\|f_m\|_\infty = 1$ et $\|\pi(g)\|_\pi = 1$:

$$\int_{\Omega} \|\pi(\varphi_k \omega) - \pi(\psi_k \omega)\|_\pi \mu(d\omega);$$

d'autre part:

$$\begin{aligned} \|\pi(\varphi_k \omega) - \pi(\psi_k \omega)\|_\pi &\leq \|\pi(\varphi \omega) - \pi(\psi \omega)\|_\pi + \|\pi(\varphi_{k-1} S \omega) - \pi(\psi_{k-1} S \omega)\|_\pi \\ &\leq \|\pi(\varphi \omega) - \pi(\psi \omega)\|_\pi + \dots + \|\pi(\varphi S^{k-1} \omega) - \pi(\psi S^{k-1} \omega)\|_\pi, \end{aligned}$$

d'où finalement:

$$\begin{aligned} \partial(\hat{S}_\varphi^k(\nu), \hat{S}_\psi^k(\nu)) &\leq k \sum_{m,\pi} 2^m a_\pi \int_{\Omega} \|\pi \circ \varphi(\omega) - \pi \circ \psi(\omega)\|_\pi \mu(d\omega) \\ &\leq kd(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad \square$$

REMARQUE 5. Regardons $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$ comme sous-groupe \mathcal{G}_0^1 de $\mathcal{G}^1(\Omega, S)$ et soit ρ la distance définie sur l'ensemble $\mathcal{F}(M)$ des flot sur M par

$$\rho(T, T') = \text{Sup}_{\nu \in M} \partial(T\nu, T'\nu).$$

La proposition 5 exprime en particulier que l'application $\varphi \mapsto (S_\varphi, M)$ de \mathcal{G}_0^1 dans $(\mathcal{F}(M), \rho)$ est continue.

THÉORÈME 2. Pour tout processus régulier ergodique (Ω, S, μ) l'ensemble $\mathcal{E}(S, G) \cap \mathcal{G}_0$ est intersection dénombrable d'ouverts de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, G)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha > 0$ et

$$W_\alpha = \{\varphi \in \mathcal{G}_0 : \partial(Z_\varphi) < \alpha\}.$$

Montrons que W_α est ouvert dans \mathcal{G}_0^1 . Soit $\varphi \in W_\alpha$, $\varepsilon > 0$ et N l'entier $N(\varepsilon/4)$ de la proposition 4. Soit ψ dans \mathcal{G}_0 , alors pour tout ν de Z_ψ , avec les notations de la proposition 4, on a

$$\partial(\nu, Z_\varphi) \leq \partial(\nu, \nu_N) + \varepsilon/4.$$

D'autre part

$$\partial(\nu, \nu_N) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \partial(\hat{S}_\psi^k \nu, \hat{S}_\varphi^k \nu)$$

et d'après la proposition 5

$$\partial(\nu, \nu_N) \leq \frac{N-1}{2} d(\psi, \varphi).$$

Choisissons ψ telle que $d(\psi, \varphi) < \varepsilon/2N$, il vient

$$\partial(\nu, Z_\varphi) < \varepsilon/2,$$

d'où classiquement,

$$\partial(Z_\psi) < \partial(Z_\varphi) + \varepsilon.$$

Ainsi, pour $\varepsilon = \alpha - \partial(Z_\varphi)$ on a $\psi \in W_\alpha$ et par suite W_α est ouvert. Enfin le théorème 1 assure:

$$\mathcal{E}(S, G) \cap \mathcal{G}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{1/n}. \quad \square$$

PROPOSITION 6. *Pour tout processus régulier ergodique (Ω, S, μ) et G abélien métrisable compact, l'ensemble $\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{E}(S, G)$ est une réunion dénombrable de sous-groupes F_σ de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, G)$; lorsque $G = \mathbb{U}$, cette réunion est un sous-groupe.*

DÉMONSTRATION. Etudions tout d'abord le cas où $G = \mathbb{U}$ (groupe des nombres complexes de module 1). Soit $\chi \in \Lambda(\mathbb{U})$ et L_χ l'ensemble des φ dans \mathcal{G}_0 telles que l'équation

$$F = \chi \circ \varphi \cdot F \circ S \quad (\mu\text{-p.p.})$$

ait une solution mesurable non nulle $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. L_χ forme un sous-groupe de \mathcal{G}_0 , de plus $L_\chi \subset L_{\chi^k}$ pour tout entier $k \neq 0$, or χ est lui-même de la forme χ^m avec m entier non nul et χ_1 le caractère identité. Il en résulte que l'ensemble

$$L = \bigcup_{\chi \in \Lambda(\mathbb{U})} L_\chi$$

forme un sous-groupe de \mathcal{G}_0 . D'après le théorème A, $L = \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{E}(S, \mathbb{U})$ et d'après le théorème 2, L est un ensemble F_σ .

Voyons le cas général. Soit $\pi \in \Lambda(G)$ et

$$C_\pi = \bar{\pi}^{-1}(L) \cap \mathcal{G}_0^1(\Omega, G).$$

D'après la remarque 3, C_π est alors un sous-groupe F_σ de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, G)$ et la proposition 2 montre que

$$\mathcal{G}_0^1(\Omega, G) \setminus \mathcal{E}(S, G) = \bigcup_{\pi \in \Lambda(G)} C_\pi,$$

l'union étant dénombrable.

THÉORÈME 3. *Soit (Ω, S, μ) régulier ergodique et G abélien métrisable compact et convexe. Pour tout groupe G -compatible Γ tel que $\Gamma \subset \mathcal{G}_0$ et l'injection canonique $\Gamma \rightarrow \mathcal{G}_0^1$ continue, l'ensemble $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$ est résiduel dans Γ .*

En effet, d'après ce qui précède $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$ est intersection dénombrable d'ouverts de Γ qui sont denses par la proposition 1. □

Les groupes $\mathcal{G}_0^\infty(\Omega, G)$ et $\mathcal{C}^\infty(\Omega, G)$ (groupe des applications continues sur Ω à valeurs dans G) munis de la topologie de la convergence uniforme, sont des

exemples de groupes Γ satisfaisant aux conditions du théorème 3. Lorsque Γ est compact, on a un résultat métrique:

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses du théorème 3, si Γ est compact, alors $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$ est un ensemble résiduel de mesure de Haar égale à 1.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6 l'ensemble $\Gamma \setminus \mathcal{E}(S, G)$ est réunion dénombrable de sous-groupes $\Gamma_\pi = C_\pi \cap \Gamma$, parties F_σ de Γ pour la topologie induite par \mathcal{G}_0^1 . D'après le théorème 3, les Γ_π sont des sous-ensembles F_σ d'intérieurs vides dans Γ . Supposons l'un des Γ_π de mesure de Haar non nulle, alors le groupe quotient Γ/Γ_π est fini, ce qui permet d'écrire Γ comme une réunion finie d'ensemble F_σ d'intérieurs vides, ainsi Γ est un ensemble de première catégorie de Baire, ce qui est en contradiction avec la compacité de Γ . $\Lambda(G)$ étant dénombrable, il en résulte aussitôt que $\mathcal{E}(S, G) \cap \Gamma$ est de mesure pleine. □

EXEMPLE 1. Soit Q une partition de Ω en un nombre fini Q_1, \dots, Q_r de parties non μ -négligeables de Ω , d'intérieurs non vides, de frontières μ -négligeables. Associons à Q l'application $Q^*: G^s \rightarrow \mathcal{G}_0^1$ définie par $Q^*(\gamma_1, \dots, \gamma_r)(\omega) = \gamma_i$ si $\omega \in Q_i$. L'application Q^* est un monomorphisme du groupe topologique G^s dans \mathcal{G}_0^1 réalisant en fait un isomorphisme (topologique) entre G^s et $Q^*(G^s)$. Les théorèmes 3 et 4 donnent alors

COROLLAIRE. *L'ensemble des γ dans G^s tels que $(\Omega \times G, S_{Q^*(\gamma)}, \mu \otimes h)$ est ergodique, forme un ensemble résiduel de mesure de Haar 1.*

Plus généralement, on peut énoncer un principe de "tout ou rien":

THÉORÈME 5. *Soit (Ω, S, μ) régulier, ergodique et G abélien métrisable compact. Soit K un sous-groupe compact connexe de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, G)$. Alors l'ensemble $\mathcal{E}(S, G) \cap K$ est soit vide, soit résiduel de mesure de Haar (dans K) égale à 1.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6, $K \setminus \mathcal{E}(S, G)$ est formé d'une réunion de sous-groupes K_π qui sont des ensembles F_σ dans K . Retenons seulement que K_π est une partie mesurable de K ; si elle est distincte de K et de mesure non nulle, alors le groupe quotient K/K_π est fini, d'ordre m . En particulier $mK \subset K_\pi$, mais K est divisible [11], d'où $K = K_\pi$. Le groupe K_π est donc de mesure nulle ou est égal à K , ce qui démontre le théorème. □

Une transformation borélienne S sur Ω est dite *uniquement ergodique* s'il existe une unique mesure de probabilité borélienne μ invariante par S . Le processus $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ est alors dit *uniquement ergodique*.

THÉORÈME 6. *Soit (Ω, S, μ) régulier uniquement ergodique. Pour que le processus croisé $(\Omega \times G, S_\varphi, \mu \otimes h)$, avec $\varphi \in \mathcal{G}_0(\Omega, G)$, soit uniquement ergodique, il faut et il suffit qu'il soit ergodique.*

En effet, la condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons S_φ ergodique et montrons qu'il est uniquement ergodique. Soit ν dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariante par S_φ , alors la première projection $\nu|_\Omega$ est invariante par S donc égale à μ . Ainsi ν est point fixe du flot (\hat{S}_φ, M) et d'après le théorème 1, $\nu = \mu \otimes h$. □

4. Processus faiblement mélangeants

Supposons (Ω, S, μ) faiblement mélangeant et soit $i : \mathcal{G}(\Omega, G) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega \times \Omega, G \times G)$ l'application définie par

$$i(\varphi)(\omega, \omega') = (\varphi(\omega), \varphi(\omega')).$$

i est un homomorphisme de groupe. Notons $\mathcal{M}(S, G)$ l'ensemble des φ dans $\mathcal{G}(\Omega, S)$ telles que le processus croisé S_φ soit faiblement mélangeant. Par définition $S_\varphi \times S_\varphi$ est ergodique. Il nous est loisible d'identifier ce processus produit au processus

$$(\Omega^2 \times G^2, S_{i(\varphi)}, (\mu \otimes \mu) \otimes (h \otimes h))$$

de sorte que

$$(7) \quad \varphi \in \mathcal{M}(S, G) \Leftrightarrow i(\varphi) \in \mathcal{E}(S \times S, G \times G).$$

LEMME. *L'homomorphisme i est continue de $\mathcal{G}^1(\Omega, G)$ dans $\mathcal{G}^1(\Omega \times \Omega, G \times G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$, il existe π_1, \dots, π_n dans $\Lambda(G \times G)$ tels que les relations

$$(8) \quad \int_{\Omega \times \Omega} \|\pi_k(i(\varphi)x) - \pi_k(i(\psi)x)\|_{\pi_k} \mu(dx) \leq \varepsilon$$

satisfaites pour tous $k = 1, \dots, n$, entraînent $d(i(\varphi), i(\psi)) \leq 2\varepsilon$. Pour $\ell = 1, 2$, notons π_{k_ℓ} la représentation de G dans U_{π_k} définie par

$$\pi_{k_\ell}(g) = \begin{cases} \pi_k(1, g) & \text{si } \ell = 1, \\ \pi_k(g, 1) & \text{si } \ell = 2. \end{cases}$$

Pour réaliser (8), il suffit d'avoir

$$(9) \int_{\Omega} (\|\pi_{k_1}(\varphi(\omega)) - \pi_{k_1}(\psi(\omega))\|_{\pi_k} + \|\pi_{k_2}(\varphi(\omega)) - \pi_{k_2}(\psi(\omega))\|_{\pi_k}) \mu(d\omega) \leq \varepsilon.$$

Chaque π_{k_i} est équivalente à une somme directe de représentations irréductibles dans $\Lambda(G)$, $\pi_{k_i}^{(1)} \oplus \dots \oplus \pi_{k_i}^{(s)}$, dont l'espace de Hilbert associé est la somme directe $H_{\pi_{k_i}^{(1)}} \oplus \dots \oplus H_{\pi_{k_i}^{(s)}}$ isométrique à H_{π_k} , de sorte que l'on met en évidence des représentations $\chi_1, \dots, \chi_{s_k}$ dans $\Lambda(G)$, non nécessairement distinctes, telles que pour réaliser (9) il suffit d'avoir

$$(10) \sum_{i=1}^{s_k} \int_{\Omega} \|\chi_i(\varphi(\omega)) - \chi_i(\psi(\omega))\|_{\chi_i} \mu(d\omega) \leq \varepsilon,$$

et par définition de d sur $\mathcal{G}^1(\Omega, G)$, il existe $\eta > 0$ tel que la relation $d(\varphi, \psi) \leq \eta$ assure (10) pour tous $k = 1, \dots, n$. □

Donnons quelques conséquences de ce lemme et de (7). Le théorème 2 donne immédiatement

THÉORÈME 7. *Pour tout processus régulier faiblement mélangeant (Ω, S, μ) l'ensemble $\mathcal{G}_0^1 \setminus \mathcal{M}(S, G)$ est un sous-ensemble F_σ de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, S)$.*

Lorsque G est abélien, la proposition 6 donne le

SCOLIE. $\mathcal{G}_0^1 \setminus \mathcal{M}(S, G)$ est une réunion dénombrable de sous-groupes F_σ de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, S)$.

Le problème essentiel est de produire des φ dans $\mathcal{M}(S, G)$. Ces φ ne peuvent être constantes puisque dans ce cas, le processus correspondant $(\Omega \times G_a, S_a, \mu \otimes h_a)$, s'il est toujours ergodique (remarque 1), n'est jamais faiblement mélangeant (sauf si $a = 1_G$). Par ailleurs, on a encore un principe de tout ou rien:

THÉORÈME 8. *Soit (Ω, S, μ) régulier faiblement mélangeant, G abélien métrisable compact et K sous-groupe compact connexe de $\mathcal{G}_0^1(\Omega, G)$. Alors $K \cap \mathcal{M}(S, G)$ est soit vide, soit résiduel de mesure de Haar (de K) égale à 1.*

Compte-tenu du scolie, la démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle du théorème 5.

Envisageons sur l'espace produit $\Omega_x = \Omega^{\mathbb{N}}$ la mesure produit μ_x induite par μ et (Ω_x, T, μ_x) le shift sur $\Omega_x(T(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) = (\omega_1, \omega_2, \dots))$. On sait que ce shift est un processus ergodique et même fortement mélangeant. Soit $p : \Omega_x \rightarrow \Omega$ la première projection ($p(\omega_0, \omega_1, \dots) = \omega_0$), pour toute f dans $\mathcal{G}(\Omega, G)$ on notera \tilde{f} l'application composée $f \circ p$. et $\mathcal{P}(f)$ l'ensemble des g de $f(\Omega)$ tels que

pour tout ouvert U de G contenant g on ait $\mu(f^{-1}(U)) > 0$. Introduisons comme dans [14] le spectre d'une partie A de G comme étant l'ensemble $\text{Sp}(A)$ des éléments a de U tels que le sous-groupe fermé par $A \times \{a\}$ soit distinct de $G \times U_a$.

THÉORÈME 9. *Pour toute f dans $\mathcal{G}(\Omega, G)$ les propositions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\mathcal{G}(\Omega_\infty \times G, T_f, \mu_\infty \otimes h)$ est faiblement mélangeant.
- (ii) $\text{Sp}(\mathcal{F}(f)) = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in U$ et S_a la transformation

$$(\omega, g, z) \mapsto (T\omega, gf(\omega), za)$$

définie sur $\Omega_\infty \times G \times U_a$. La mesure $\lambda = \mu_\infty \otimes h \otimes h_a$, où h_a est la mesure de Haar de U_a , est invariante par S_a . Nous allons montrer le résultat suivant:

LEMME. *Le processus $(\Omega_\infty \times G \times U_a, S_a, \lambda)$ est ergodique si et seulement si $a \notin \text{Sp}(\mathcal{F}(f))$.*

En effet, soit $\pi \in \Lambda(G \times U_a)$ et $F: \Omega_\infty \rightarrow H_\pi$ une solution mesurable de l'équation

$$(11) \quad F(\omega) = \pi(\tilde{f}(\omega), a)F(T\omega) \quad \mu_\infty\text{-p.p.}$$

L'ergodicité de μ_∞ relativement à T montre que $\omega \mapsto \|F(\omega)\|_\pi$ est μ_∞ -presque partout égale à une constante que nous pouvons supposer être égale à 0 ou 1. Choisissons 1. L'espérance conditionnelle $E(F \| p, \dots, p \circ T^{n-1})$ converge μ_∞ -p.p. vers F quand n tend vers l'infini; en norme, elle converge vers 1. Par (11) cette espérance vaut

$$\pi(\tilde{f}(\omega) \dots \tilde{f}(T^{n-1}\omega), na)E(F \circ T^n \| p, \dots, p \circ T^{n-1})(\omega).$$

D'autre part, $F \circ T^n$ étant indépendant de $p, \dots, p \circ T^{n-1}$ et μ_∞ invariante par T , on a

$$E(F \circ T^n \| p, \dots, p \circ T^{n-1}) = \int_{\Omega_\infty} F(\omega) \mu_\infty(d\omega) \quad \mu_\infty\text{-p.p.}$$

ce qui donne par passage à la limite en prenant les normes:

$$\left\| \int_{\Omega_\infty} F(\omega) \mu_\infty(d\omega) \right\|_\pi = 1 \quad \mu_\infty\text{-p.p.}$$

Il en résulte, par convexité, que F est constante F_0 presque partout. Soit

$g \in \mathcal{F}(f)$, on peut exhiber une suite $(g_n)_n$ dans G convergente vers g et telle que $\pi(g_n, a)F_0 = F_0$ d'où à la limite $\pi(g, a)F_0 = F_0$.

Supposons $a \notin \text{Sp}(\mathcal{F}(f))$, alors $\pi(u)F_0 = F_0$ pour tout u dans $G \times U_a$ et l'irréductibilité de π assure $F_0 = 0$, contradiction. $(\Omega_\infty \times G \times U_a, S_a, \lambda)$ est donc ergodique d'après le théorème A.

Réciproquement, supposons $(\Omega_\infty \times G \times U_a, S_a, \lambda)$ ergodique, alors pour λ -presque tout (ω, g, z) et tout (φ, ψ) dans $\mathcal{C}(G) \times \mathcal{C}(U_a)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(g\tilde{f}_k(\omega))\psi(za^k) = \int_{G \times U_a} \varphi(u)\psi(v)h \otimes h_a(dudv).$$

La suite $k \mapsto (g\tilde{f}_k(\omega), za^k)$ est répartie dans $G \times U_a$ selon la mesure de Haar; il en est donc de même pour la suite

$$k \mapsto (f(\omega_0)f(\omega_1) \dots f(\omega_{k-1}), a^k),$$

ceci pour μ_∞ -presque tout $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$. Il reste à montrer que l'on peut choisir un tel ω avec $f(\omega_i) \in \mathcal{F}(f)$ pour tout $i \geq 0$.

Par définition $G \setminus \mathcal{F}(f)$ est réunion d'ouverts V tels que $\mu(f^{-1}(V)) = 0$; G possédant une base dénombrable d'ouverts, l'ensemble $A = f^{-1}(G \setminus \mathcal{F}(f))$ est de mesure nulle, donc

$$\mu_\infty \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(p^{-1}(A)) \right) = 0,$$

et l'existence de ω est assurée.

Supposons (i), alors le processus S_a est ergodique pour tout a dans U et (ii) résulte du lemme.

Supposons (ii), S_a est ergodique pour tout a dans U , de même pour T_j ; en particulier, par le théorème A, l'équation $F = aF \circ T_j$ n'a pas de solution mesurable $F : \Omega_\infty \times G \rightarrow \mathbb{C}$ autre que la solution nulle (presque partout) lorsque $a \neq 1$, donc T_j est faiblement mélangeante. □

REMARQUE 6. D'après le lemme, on prenant $a = 1_G$ on obtient

Le processus $(\Omega_\infty \times G, T_j, \mu \otimes h)$ est ergodique si et seulement si $\mathcal{F}(f)$ engendre un sous-groupe dense de G .

REMARQUE 7. Soient u_1, \dots, u_s des éléments de G tels que la famille $\{u_i u_j^{-1}; 1 \leq i, j \leq s\}$ engendre un sous-groupe dense dans G , alors $\text{Sp}(\{u_1, \dots, u_s\}) = \emptyset$. En particulier, si G est abélien métrisable compact et connexe, d'après la remarque 1, l'ensemble des couples (u, v) dans $G \times G$ tels que $\text{Sp}(\{u, v\}) = \emptyset$ est résiduel de mesure de Haar 1.

Dans la suite $\mathcal{M}_1(T, G)$ désigne l'ensemble des φ de $\mathcal{G}(\Omega, G)$ telles que $\tilde{\varphi}$ est dans $\mathcal{M}(T, G)$.

THÉOREME 10. *Supposons μ non dégénérée (c'est-à-dire, non concentrée en un point) et G abélien métrisable compact connexe. Alors $\mathcal{M}_1(T, G) \cap \mathcal{G}_0(\Omega, G)$ (resp. $\mathcal{M}_1(T, G) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega, G)$) est résiduel dans \mathcal{G}_0^1 (resp. dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, G)$ muni de la topologie de la convergence uniforme).*

DÉMONSTRATION. Envisageons l'application $j : \mathcal{G}^1(\Omega, G) \rightarrow \mathcal{G}^1(\Omega_\infty \times \Omega_\infty, G \times G)$ définie par

$$j(\varphi)(\omega, \omega') = (\tilde{\varphi}(\omega), \tilde{\varphi}(\omega')).$$

j est continue et l'on a :

$$j(f) \in \mathcal{M}_1(T, G) \Leftrightarrow j(f) \in \mathcal{E}(T \times T, G \times G)$$

puisque T_j est faiblement mélangeante si et seulement si $T_j \times T_j$ (qui est isomorphe à $(T \times T)_{(f, f)}$) est ergodique. Le théorème 2 montre que $\mathcal{M}_1(T, G) \cap \mathcal{G}_0$ est intersection dénombrable d'ouverts de \mathcal{G}_0^1 ; il en est donc de même pour $\mathcal{M}_1(T, G) \cap \mathcal{C}^\infty$ dans \mathcal{C}^∞ puisque la topologie envisagée sur \mathcal{C}^∞ est plus fine que celle induite par la topologie de \mathcal{G}_0^1 . Il reste à démontrer la densité.

Par hypothèse sur le support de μ , pour toute f dans $\mathcal{G}_0(\Omega, G)$, il existe ω_1 et ω_2 distincts dans le support de μ et qui soient points de continuité de f . Remarquons maintenant que G est un groupe solénoïdal [11], c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme additif continue $\tau : \mathbf{R} \rightarrow G$ d'image dense. Pour tout caractère non trivial π de G , $\pi \circ \tau$ est non trivial et $\text{Ker}(\pi \circ \tau)$ est un sous-groupe discret de \mathbf{R} , donc dénombrable. Posons $\alpha_\pi = \pi(f(\omega_1) - f(\omega_2))$ et

$$A = \bigcup_{\pi \in \Lambda(G)} (\pi \circ \tau)^{-1}(\alpha_\pi).$$

A est dénombrable. Soit $\eta > 0$, l'ensemble $[0, \eta] \setminus A$ contient au moins un élément t et par définition $f(\omega_1) - f(\omega_2) - \tau(t)$ est un générateur de G puisque d'images distinctes de 1 par tous les caractères non triviaux de G . Soit alors $\varphi : \Omega \rightarrow [0, t]$ continue, telle que $\varphi(\omega_1) = 0$, $\varphi(\omega_2) = t$. $\tau \circ \varphi$ est dans $\mathcal{C}(\Omega, G)$; par construction et la remarque 6 on a

$$\text{Sp}(\mathcal{I}(f + \tau \circ \varphi)) \subset \text{Sp}(\{f(\omega_1), f(\omega_2) + \tau(t)\}) = \emptyset.$$

L'arbitraire sur η et la continuité de τ assure alors la densité de $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{G}_0^1$ et de $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{C}^\infty$ respectivement. □

Envisageons plus particulièrement sur le tore \mathbf{R}/\mathbf{Z} l'endomorphisme $x \mapsto rx$

modulo 1, r entier ≥ 2 , que nous noterons r^* . Désignons par m la mesure de Haar sur le tore, on sait que $(\mathbf{R}/\mathbf{Z}, r^*, m)$ est un processus fortement mélangeant.

THÉORÈME 11. *Soit $\varphi : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier, alors les deux propositions :*

(i) $\mathcal{S}(\varphi)$ contient au moins deux valeurs dont la différence est irrationnelle,

(ii) le processus $((\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2, r^*_{\varphi \bmod 1}, m^2)$ est faiblement mélangeant,

sont équivalentes. En outre $\mathcal{M}(r^*, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) \cap \mathcal{G}_0(\mathbf{R}/\mathbf{Z}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ est résiduel dans \mathcal{G}_0^1 comme dans \mathcal{G}_0^∞ .

DÉMONSTRATION. Supposons φ en escalier, sans autre condition. Dans [20] W. Veech donne une démonstration de son Lemme 2 qui s'adapte bien ici pour montrer que pour tout λ nombre complexe et tout q entier, les seules applications mesurables $F : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$ telles que

$$(12) \quad F = \lambda e^{2imq\varphi} \cdot F \circ r^* \quad (m\text{-p.p.})$$

sont constantes (m -p.p.). En fait, choisissons une telle solution et identifions \mathbf{R}/\mathbf{Z} à $[0, 1[$. Notons $\varphi_k = \varphi + \varphi \circ r^* + \dots + \varphi \circ r^{*k-1}$ et H_k l'ensemble des intervalles $J_k^\ell = [\ell/r^k, (\ell + 1)/r^k[$ de $[0, 1[$ qui ne contiennent aucun point de discontinuités des fonctions $\varphi, \varphi \circ r^*, \dots, \varphi \circ r^{*k-1}$. Soit s le nombre de discontinuité de φ , alors si $U_p = \bigcap_{k \geq p} (\bigcup_{I \in H_k} I)$ on a $m(U_p) \geq 1 - s \sum_{k \geq p} k/r^k$. Choisissons p tel que $m(U_p) > 0$, alors pour tout y dans U_p il existe un intervalle I de H_p , un ensemble infini A d'entiers $k \geq p$ auxquels on peut associer un intervalle J_k de H_k tel que $y \in J_k, r^n J_k \in H_{k-n}$ pour $n = 0, \dots, k - p$ et $r^{k-p} J_k = I$. Notons que φ_{k-p} est constante sur J_k et posons λ_k la valeur constante de $\lambda e^{2imq\varphi_{k-p}}$ sur cet intervalle. En intégrant la relation $F = \lambda e^{2imq\varphi_{k-p}} F \circ r^{*k-p}$ sur J_k , un simple changement de variable donne

$$(13) \quad \frac{1}{m(J_k)} \int_{J_k} F(\omega) m(d\omega) = \frac{\lambda_k}{m(I)} \int_I F(\omega) m(d\omega).$$

Le théorème de différenciation de Lebesgue montre que pour presque tout y dans U_p , le terme de gauche dans (13) converge vers $F(y)$ (pour $k \in A$); à la limite, en notant que $|\lambda| = 1$:

$$\left| \frac{1}{m(I)} \int_I F(\omega) m(d\omega) \right| = 1$$

et par convexité, F est constante (m -pp) sur I . La relation $F = \lambda e^{2imq\varphi} \cdot F \circ r^{*p}$ montre que F est égale presque partout à une fonction en escalier; en particulier, on peut supposer F constante sur un intervalle $[0, 1/r^k[$ et la relation

(12) montre que F est constante sur $[0, 1/r^{k-1}]$. Finalement F est constante sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} ainsi que $\lambda e^{2i\pi q\varphi}$.

Supposons (i) alors $\lambda e^{2i\pi q\varphi}$ ne peut être constante quel que soit le choix de λ et q . Le théorème A et la caractérisation spectrale des processus faiblement mélangeants [10] assurent (ii). Supposons (ii) sans avoir (i), alors il existe $q \in \mathbf{Z}^*$, λ et α dans \mathbf{U} tels que $\alpha = \lambda e^{2i\pi q\varphi}$ sauf éventuellement aux points de discontinuité de φ . Alors $x \mapsto e^{2i\pi qx}$ est fonction propre de $r_{\varphi \bmod 1}^*$, de valeur propre α , ce qui contredit (ii).

Pour terminer la démonstration, compte-tenu du théorème 7, il suffit de remarquer que l'ensemble des fonctions en escaliers soumises à la condition (i) — et réduites modulo 1 — est dense dans $\mathcal{G}_0^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$.

REMARQUE 8. Si $\mathcal{F}(\varphi)$ contient une valeur irrationnelle, la démonstration précédente avec $\lambda = 1$ montre que $r_{\varphi \bmod 1}^*$ est ergodique.

REMARQUE 9. La condition “ φ en escalier” est susceptible d’être élargie aux fonctions simples, sous réserve que la frontière de l’ensemble des points de discontinuité ne contienne pas 0 et satisfasse à la condition de W. Veech [20].

REMARQUE 10. Nous ne savons pas si $\mathcal{M}(r^*, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) \cap \mathcal{G}^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ est résiduel, faute de pouvoir produire suffisamment de fonctions φ continues telles que $r_{\varphi \bmod 1}^*$ soit faiblement mélangeant.

5. Irrégularités de distribution

Utilisons la notion de *point générique*; rappelons qu’un point ω de Ω est dit (S, μ) -générique si, pour toute f dans $\mathcal{C}(\Omega)$, on a

$$(14) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n \omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega).$$

Remarquons que (14) s’étend aux fonctions $f \mu$ -Riemann intégrables c’est-à-dire aux fonctions μ -continues bornées. Le théorème généralise des résultats classiques (voir par exemple [4, 16]). La démonstration de la forme générale donnée ici est esquissée dans [14], nous en donnons une démonstration plus directe et indépendante.

THÉORÈME 12. Soient (Ω, S, μ) un processus régulier ergodique, G un groupe métrisable compact. Pour toute $\varphi \mu$ -continue de Ω dans G , les propositions

- (i) $(\Omega \times G, S_\varphi, \mu \otimes h)$ est ergodique,
 - (ii) pour tout ω de Ω , (S, μ) -générique, et tout g de G , le point (ω, g) est $(S_\varphi, \mu \otimes h)$ -générique,
- sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. Soit ν un point extrémal de Z_φ , ensemble des points fixes du flot (\hat{S}_φ, M) . Un tel point existe d'après la proposition 3 et le théorème de Krein–Mil'man. On a vu dans la démonstration du théorème 1 que $(\Omega \times G, S_\varphi, \nu)$ est alors ergodique. Ainsi ν -presque tout point (ω, g) est (S_φ, ν) -générique. Supposons (ii), puisque $\nu|_1 = \mu$, pour μ -presque tout ω , point (S, μ) -générique, il existe g dans G tel que (ω, g) soit (S_φ, ν) -générique. Ce point étant aussi $(S_\varphi, \mu \otimes h)$ -générique, il en résulte $\nu = \mu \otimes h$, d'où (i) (théorème 1). Supposons (i) et soit ω un point (S, μ) -générique. Choisissons g dans G et ν dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$, valeur d'adhérence, pour la topologie faible, de la suite des moyennes de Dirac $N \mapsto (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{S_\varphi^n(\omega, g)}$.

Par définition, il existe une suite strictement croissante d'entiers, $k \mapsto N_k$, telle que pour toute f de $\mathcal{C}(\Omega \times G)$, on ait

$$(15) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} f(S_\varphi^n(\omega, g)) = \int_{\Omega \times G} f(x) \nu(dx).$$

Le choix de ω assure $\nu|_1 = \mu$. D'autre part (15) s'étend aux fonctions f ν -continues bornées; en particulier, on peut remplacer dans (15) f par $f \circ S_\varphi$, ce qui donne l'égalité

$$\nu(f) = \int_{\Omega \times G} f \circ S_\varphi(x) \nu(dx)$$

et par suite ν est point fixe de S_φ . D'après le théorème 1, $\nu = \mu \otimes h$. Puisque \mathcal{P} est métrisable compact, la suite $N \mapsto (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{S_\varphi^n(\omega, g)}$ converge faiblement vers $\mu \otimes h$, c'est-à-dire (ω, g) est $(S_\varphi, \mu \otimes h)$ -générique. \square

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème 12, pour tout ω dans Ω , (S, μ) -générique et toute φ de $\mathcal{C}(S, G) \cap \mathcal{G}_0(\Omega, G)$, la suite $n \mapsto \varphi(\omega) \dots \varphi(S^{n-1}\omega)$ est équirépartie dans G .*

Il faut en effet montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}(G), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi(\omega) \dots \varphi(T^{n-1}\omega)) = \int_G f(g) h(dg),$$

ce qui résulte immédiatement de (ii), théorème 11.

COROLLAIRE 2. *Soit (Ω, S, μ) régulier ergodique et ω un point (S, μ) -générique. L'ensemble des applications $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ dans $\mathcal{C}_\mathbf{R}^\infty(\Omega)$ (resp. dans l'espace $\mathcal{L}_0^1(\Omega, \mu)$ des fonctions numériques μ -Riemann intégrables sur Ω muni de la norme $\varphi \mapsto \int_\Omega |\varphi| d\mu$) telles que la suite $n \mapsto f(\omega) + \dots + f(S^{n-1}\omega)$ soit équirépartie mod 1, contient un sous-ensemble résiduel de $\mathcal{C}_\mathbf{R}^\infty(\Omega)$ (resp. de $\mathcal{L}_0^1(\Omega, \mu)$).*

En effet, l'application $\varepsilon : \mathcal{L}'_0(\Omega, \mu) \rightarrow \mathcal{G}'_0(\Omega, U)$ définie par $\varepsilon(f) = e^f$ est continue; d'après le théorème 2 l'ensemble

$$C = \varepsilon^{-1}(\mathcal{Z}(S, U) \cap \mathcal{G}'_0)$$

est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathcal{L}'_0(\Omega, \mathbf{R})$. Pour conclure il suffit de montrer que $C \cap \mathcal{C}_{\mathbf{R}}^{\times}(\Omega)$ est partout dense dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}^{\times}(\Omega)$. Il est clair que $\varepsilon(\mathcal{C}_{\mathbf{R}}^{\times}(\Omega))$ est un sous-groupe U-compatible de $\mathcal{G}'_0(\Omega, U)$. Soit f dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}^{\times}(\Omega)$, la démonstration de la proposition 1 montre en particulier que pour tout $\alpha > 0$, il existe η réel tel que $|\eta| < \alpha$ et $\varepsilon(f + \eta) \in \mathcal{Z}(S, U)$. Ainsi $f + \eta \in C$ d'où le corollaire.

Une suite $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans Ω est dite μ -complètement répartie si ω est (T, μ_{\times}) -générique pour le shift T sur Ω_{∞} . Le théorème 12 (corollaire 1) et la remarque 6 donnent le

THÉORÈME 13. *Soit $n \mapsto \omega_n$ une suite μ -complètement répartie dans Ω , alors pour toute $f : \Omega \rightarrow G$ μ -continue telle que $\mathcal{F}(f)$ engendre un sous-groupe dense dans G , la suite*

$$n \mapsto f(\omega_1) \dots f(\omega_n)$$

est h-répartie dans G .

En particulier, pour toute suite $n \mapsto u_n$ à valeurs dans $[0, 1]$ et complètement équirépartie mod 1 (i.e. pour la mesure de Lebesgue), on a:

La suite $n \mapsto f(u_1) + \dots + f(u_n)$ est équirépartie modulo 1 pour toute $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, continue non constante rationnelle.

Supposons en outre $u_n \neq 0$ pour tout n , alors:

Pour tout $\alpha > 0$, la suite $n \mapsto \frac{1}{u_1^\alpha} + \dots + \frac{1}{u_n^\alpha}$ est équirépartie modulo 1.

La suite $n \mapsto \text{Log} \prod_{k=1}^n \frac{1}{u_k}$ est équirépartie modulo 1.

Nous terminons en montrant comment le théorème 12 permet de généraliser un résultat de Van der Corput [6] sur le tore:

PROPOSITION 7. *Soit G un groupe métrisable monothétique compact, $n \mapsto u_n$ une suite à valeurs dans G telle que la suite $n \mapsto u_n^{-1} u_{n+1}$ soit convergente de limite a . Supposons a générateur de G , alors la suite $n \mapsto u_n$ est équirépartie dans G .*

DÉMONSTRATION. Soit $(T, \Omega_{\infty}, \mu_{\times})$ un shift tel que μ soit continue ($\mu(\{\omega\}) = 0$

pour tout ω dans Ω). Soit x un point (T, μ_∞) -générique et $f: \Omega \rightarrow G$ l'application définie par

$$f(\omega) = \begin{cases} u_n^{-1} u_{n+1} & \text{si } \omega = T^n x, \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, f est continue en tout point de ω n'appartenant pas à l'orbite de x , f est donc μ -continue. La suite $n \mapsto u_0^{-1} u_n$ est donc h -répartie dans G d'après le théorème 12, l'équirépartition de $n \mapsto u_n$ en résulte. \square

BIBLIOGRAPHIE

1. R. L. Adler and P. C. Shields, *Skew products of Bernoulli shifts with rotations*, Israel J. Math. **12** (1972), 215–222.
2. R. L. Adler and P. C. Shields, *Skew products of Bernoulli shifts with rotations II*, Israel J. Math. **19** (1974), 228–236.
3. H. Anzai, *Ergodic skew-product transformations on the torus*, Osaka Math. J. **3** (1951), 83–99.
4. J. P. Conze, *Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques*, publications des séminaires, Université de Rennes, 1976.
5. J. P. Conze et M. Keane, *Ergodicité d'un flot cylindrique*, préprint.
6. Corput, J. G., Van der, *Diophantische Ungleichungen I. Zur Gleichverteilung modulo Eins*, Acta Math. **56** (1931), 373–456.
7. H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformation of the torus*, Amer. J. Math. **83** (1961), 573–601.
8. H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.
9. P. R. Halmos and H. Samelson, *On monothetic groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **28** (1942), 254–258.
10. P. R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.
11. E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, 1963.
12. M. Keane et G. Rauzy, *Stricte ergodicité des échanges d'intervalles*, à paraître.
13. L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience Publication, 1974.
14. P. Liardet, *Répartition et ergodicité*, Séminaire D.P.P. Paris, 19^e année, n° 10, 1977–78, 12p.
15. G. Rauzy, *Sur une suite liée à la discrèpance de la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$* , Univers. d'Aix-Marseille II, 5p. (non publié).
16. G. Rauzy, *Répartition modulo 1*, SMF-Asterisque **41–42** (1977), 81–101.
17. M. Stewart, *Irregularities of uniform distribution*, à paraître.
18. W. Veech, *Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker–Weyl Theorem mod 2*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 1–33.
19. W. Veech, *Well distributed sequences of integers*, Trans. Amer. Math. Soc. **161** (1971), 63–70.
20. W. Veech, *Some questions of uniform distribution*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 125–138.
21. W. Veech, *Finite group extensions of irrational rotations*, Israel J. Math. **21** (1975), 240–259.

LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S. N° 225

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

3 PLACE VICTOR-HUGO

13331 MARSEILLE CEDEX 3, FRANCE